数理解析研究所講究録
355巻 1979年 88-97

擬微分作用素のL^p-有界性とL^2-有界性

東大 理　青木 邁

§0. 序

R. Illner [8] は、$a(x,\xi,y)$ $(\in S^{\mu}_{\rho,\delta,\varepsilon})$ をシンボルに持つ擬微分作用素のL^p-有界性($1<{}^\forall p<\infty$) を調べた。彼の方法は、L^1-弱有界性の十分条件を調べることによって、A.P. Calderón − R. Vaillancourt [6] のL^2-有界性の結果と組合せ、Marcinkiewicz の補間定理を使って、L^p-有界性 ($1<{}^\forall p<\infty$) を保証する条件を求めている。単シンボルの場合、Illner の結果は次の様になる。

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-(n+1)} \text{ for } |\alpha|\leqq m_1,\ |\beta|\leqq m$$

(ここで m, m_1 は $m_1 > \frac{5}{4}n$, $m \geqq \frac{n+2}{2}$ なる整数)

$\Rightarrow$ 擬微分作用素 $a(X,D)$ は、$L^p(R^n)$上で有界である。($1<{}^\forall p<\infty$)

この小論では、L^p-有界な擬微分作用素 ($r\leqq {}^\forall p \leqq r'$) を対応させるシンボルクラスの族を構成する ($1\leqq r\leqq 2$,

$1/r + 1/r' = 1$）〔定理１〕。　$r=1$ の場合のシンボルクラスは、R.Illner の上述のクラスに似通ったものである。さらに $C_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する擬微分作用素を対応させるシンボルクラスの族をも構成する（$1 \leq p < \infty$）〔定理２〕。　このクラスの族は、上述のクラスの族を部分族として含んでいる。

§1 で、結果を定式化するのに必要になる混合ノルムを持った空間を導入し、その基本的性質を特記する。§2 では定理１と定理２の証明に必要な準備を行なう。　§3において擬微分作用素の L^p-有界性と L^2-核型性に関する結果（定理１定理２）を与へ、証明の概略を示す。

単シンボル $a(x,\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対する擬微分作用素 $a(X,D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は次の等式で定義される。

$$ {}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}\langle a(X,D)u, v\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = {}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}\langle a, w\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} $$

$$ w(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\xi\cdot x}\hat{u}(\xi)v(x) $$

ここで　$u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。

特に　$a(x,\xi) = x_j$ の時、$a(X,D) = X_j$（函数 x_j を掛ける作用素）

$a(x,\xi) = \xi_j$ の時、$a(X,D) = D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$　となる。

$C_p(L^2(\mathbb{R}^n))$　（$p>0$）は、コンパクト作用素で、その p-ノルムが有限なもの全体を示す。　p-ノルムはコンパクト作用素の特性数の ℓ^p-ノルムで定義される。特に、$C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ は trace class であり、$C_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ は Hilbert-Schmidt class である。

§1. 混合ノルムを持った空間；$L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$, $L^{p,q}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$

<u>定義</u>　　$\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$ で定義された可測函数 $f(x,\xi)$ に対して

$$f\in L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi) \underset{def.}{\Longleftrightarrow} \|f\|_{L^{p,q}_{\leftarrow}}=\left(\int dx\left(\int d\xi\,|f(x,\xi)|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}<\infty,$$

$$f\in L^{p,q}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi) \underset{def.}{\Longleftrightarrow} \|f\|_{L^{p,q}_{\rightarrow}}=\left(\int d\xi\left(\int dx\,|f(x,\xi)|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}<\infty$$

と定義する。（一般の混合ノルムを持った空間については A. Benedek－R. Panzone [4] を参照。）

Jessen 不等式より

$$(1.1)\quad \begin{cases} L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\supset L^{p,q}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi) & (1\leqq q\leqq p\leqq\infty) \\ L^{p,q}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\supset L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi) & (1\leqq p\leqq q\leqq\infty), \end{cases}$$

さらに、Hölder 不等式より

$$(1.2)\quad \left|\iint dx\,d\xi\; f(x,\xi)\,g(x,\xi)\right| \leqq \|f\|_{L^{p,q}_{\leftarrow}}\,\|g\|_{L^{p',q'}_{\leftarrow}},$$

$$(1.2')\quad \left|\iint dx\,d\xi\; f(x,\xi)\,g(x,\xi)\right| \leqq \|f\|_{L^{p,q}_{\rightarrow}}\,\|g\|_{L^{p',q'}_{\rightarrow}},$$

ここで $1/p+1/p'=1$, $1/q+1/q'=1$, $1\leqq p,q\leqq\infty$。

記号 $[X,Y]_\theta$ によって、A.P. Calderón [5] の複素補間空間を表わすとすると、次の補題が成立する。

<u>補題 1.1</u>　　$1\leqq p_0,p_1,q_0,q_1\leqq\infty$ とする。さらに $p_0=p_1=\infty$, $q_0\neq q_1$ 又は $p_0\neq p_1$, $q_0=q_1=\infty$ ではないとする。　$0<\theta<1$ なる θ に対して次式が成立する。

$$(1.3)\quad [L^{p_0,q_0}_{*}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi),\, L^{p_1,q_1}_{*}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)]_\theta = L^{p,q}_{*}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$$

ここで $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$,

$*$ は、矢印 $\leftarrow$ 又は 矢印 $\rightarrow$ と読む。

以下、矢印$\leftarrow$, $\rightarrow$は、どちらと考えてもよいときは省略する。

§2. 基本結果

簡単な計算により、次の補題を得る。

<u>補題 2.1.</u> $g(x,\xi)=c(x)d(\xi)$, $u, v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し

(2.1) $$h(x,\xi)=\left(e^{i\xi X}e^{-ixD}g(X,D)e^{ixD}e^{-i\xi X}u;\ v\right)_{L^2}$$

と置く。

(2.2) $c, \hat{d}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ とすると

$h\in L^{1,\infty}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ が成立する。さらに

(2.3) $$\|h\|_{L^{1,\infty}_{\leftarrow}}\leqq\|c\|_{L^1}\|\hat{d}\|_{L^1}\|u\|_{L^r}\|v\|_{L^{r'}}$$

$$\left(1/r+1/r'=1,\ 1\leqq r\leqq\infty\right)\ 。$$

<u>注意</u> (2.2) を

(2.4) $\hat{c}, d\in L^1(\mathbb{R}^n)$ に置き替えると

$h\in L^{\infty,1}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ が成立し、さらに

(2.5) $$\|h\|_{L^{\infty,1}_{\rightarrow}}\leqq\|\hat{c}\|_{L^1}\|d\|_{L^1}\|\hat{u}\|_{L^r}\|\hat{v}\|_{L^{r'}}\ 。$$

この補題と(1.2)より、次の命題を得る。

<u>命題 2.1.</u> $g(x,\xi)=c(x)d(\xi)$, $G=g(X,D)$, $1/r+1/r'=1$, $1\leqq r\leqq\infty$ とすると次の不等式が成立する。

(2.6) $$\left|\left(b\{G\}u,v\right)_{L^2}\right|\leqq\|b\|_{L^{\infty,1}_{\leftarrow}}\|c\|_{L^1}\|\hat{d}\|_{L^1}\|u\|_{L^r}\|v\|_{L^{r'}}$$

$$\text{for }\ b\in L^{\infty,1}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi),\ c,\hat{d}\in L^1(\mathbb{R}^n),\ u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)。$$

ここで

$$(2.7) \qquad b\{G\} = \iint dx\,d\xi\; b(x,\xi)\, e^{i\xi X} e^{-ixD} G\, e^{ixD} e^{-i\xi X} \quad 。$$

次に、[2] の補題4（Lemma 4.1 [3]）を、後に使用する形にしておく。

<u>補題 2.2.</u> $g(x,\xi) = c(x)\,d(\xi)$ とする。

$$(2.8) \qquad \begin{cases} c \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n, e^{c(1+|x|^2)^{1/2}}dx) \\ \hat{d} \in L^2_{2N}(\mathbb{R}^n) \qquad (2N\text{階の Sobolev 空間}) \end{cases}$$

を満足させる定数 $C > 0$，整数 $N > n/4$ が存在すれば

$g(X,D) \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ である。 さらに

$$(2.9) \qquad \|g(X,D)\|_1 \leqq C_N \|c\|_{\tilde{L}^2} \|\hat{d}\|_{L^2_{2N}} \quad 。$$

<u>注意</u> 条件 (2.8) を

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \hat{c} \in L^2_{2N}(\mathbb{R}^n) \\ d \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

に置き替えると

$g(X,D) \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ が成立し、さらに

$$(2.11) \qquad \|g(X,D)\|_1 \leqq C_N \|\hat{c}\|_{L^2_{2N}} \|d\|_{\tilde{L}^2} \quad 。$$

更に、[2] の補題2（Theorem 1(I), [3]）を書き替える。

<u>命題 2.2.</u> $g(x,\xi) = c(x)d(\xi)$, $G = g(X,D)$, $N > n/4$ とする。

$$(2.12) \qquad \|b\{G\}\|_p \leqq \begin{cases} C_N \|b\|_{L^{p,p}} \|c\|_{\tilde{L}^2} \|\hat{d}\|_{L^2_{2N}} \\ C_N \|b\|_{L^{p,p}} \|\hat{c}\|_{L^2_{2N}} \|d\|_{\tilde{L}^2} \end{cases}$$

$$\text{for } \forall b \in L^{p,p}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$$

ここで、c と d は (2.8) 又は (2.10) を満足しているとする。

§3. L^p-有界性とL^2-核型性

定理 1.

$1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$, $\quad s > (1+1/p-1/q)n/4$,

$\qquad t > (1-1/p+1/q)n/4$ とする。

$a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ に対して、

(3.1) $\quad (1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a \in L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ ならば

$a(X,D) \in B(L^r(\mathbb{R}^n))$ ($L^r(\mathbb{R}^n)$上の有界作用素全体)

for $2(1-1/p+1/q)^{-1} \leqq {}^\forall r \leqq 2(1+1/p-1/q)^{-1}$。

さらに

(3.2) $\quad \|a(X,D)\|_{B(L^r)} \leqq C \,\|(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a\|_{L^{p,q}_{\leftarrow}}$ 。

ここで定数Cは、n, $s-(1+1/p-1/q)n/4$, $t-(1-1/p+1/q)n/4$ によって定まり、a, rには依存しない。

定理 2.

$1 \leqq p, q \leqq \infty$, $\quad s > (1+1/p-1/q)n/4$,

$\qquad t > (1-1/p+1/q)n/4$ とする。

$a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ に対して、

(3.3) $\quad (1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a \in \begin{cases} L^{p,q}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi) & (1 \leqq q \leqq p \leqq \infty) \\ L^{p,q}_{\rightarrow}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi) & (1 \leqq p \leqq q \leqq \infty) \end{cases}$

ならば $\quad a(X,D) \in \begin{cases} C_r(L^2(\mathbb{R}^n)) & (r = \max\{p,q\} < \infty) \\ B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (r = \infty) \end{cases}$ 。

さらに

$$\|a(X,D)\|_r \leqq \begin{cases} C\|(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a\|_{L^{p,q}_{\leftarrow}} & (1\leqq q\leqq p\leqq\infty) \\ C\|(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a\|_{L^{p,q}_{\rightarrow}} & (1\leqq p\leqq q\leqq\infty)。\end{cases}$$

ここで定数 C は、n, $s-(1+1/p-1/q)n/4$, $t-(1-1/p+1/q)n/4$ によって定まり、a には依存しない。

s が実数の時、$\psi_s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を $(1-\Delta)^s\psi_s=\delta$ を満足する緩増加超函数とする。よく知られているように、

$$(3.5)\quad \begin{cases} \psi_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}), \\ D^\alpha\psi_s(x) = O(1+|x|^{2s-n-|\alpha|}) \text{ as } |x|\to 0 \\ \qquad\qquad \text{if } 2s-n-|\alpha|\neq 0, \\ D^\alpha\psi_s(x) \text{ decays exponentially as } |x|\to\infty。\end{cases}$$

特に、$s>0$ の時 $\psi_s\in L^1(\mathbb{R}^n)$、$s>n/4$ の時 $\psi_s\in L^2(\mathbb{R}^n)$。

[1],[2],[3],[9] で示したと同様、次の等式を示すことができる。

$$(3.6)\quad ((b*g)(X,D)u,\ v)_{L^2} = (b\{g(X,D)\}u,\ v)_{L^2}$$
$$\text{for } u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\quad g\in L^{1,1}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_x),$$
$$b\in L^{p,q}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\quad(1\leqq p,q\leqq\infty).$$

ここで 記号 $*$ はたたみ込みを示す。

<u>定理 1 の証明の概略</u>

$G=g(X,D)$, $g(x,\xi)=c(x)d(\xi)$ として、重線型形式 $F:(b,c,\hat{d},u,v)\longmapsto(b\{G\}u,v)_{L^2}$ を考える。

命題2.1より，$F: \mathcal{L}^{\infty,1}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\times\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)\times$ $\times\mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ $(1\leqq r\leqq\infty,\ 1/r+1/r'=1)$ として，Fは有界である。命題2.2より，$F: \mathcal{L}^{p,p}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\times\hat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^n)\times$ $\times\mathcal{L}^2_{2N}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ としても，Fは有界である。A.P. Calderón [5] の補間定理を使うと，$F: [\mathcal{L}^{\infty,1}_{\leftarrow},\mathcal{L}^{p,p}_{\leftarrow}]_\theta\times[\mathcal{L}^1,\hat{\mathcal{L}}^2]_\theta\times[\mathcal{L}^1,\mathcal{L}^2_{2N}]_\theta\times[\mathcal{L}^r,\mathcal{L}^2]_\theta\times$ $\times[\mathcal{L}^{r'},\mathcal{L}^2]_\theta\to\mathbb{C}$ $(0<\theta<1)$ として，Fが有界であることがわかる。

$c=\psi_s$，$d=\psi_t$，$b=(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a$ とおくと，(3.5), (3.6)，補題1.1と次の補題から定理1が導びかれる。

<u>補題 3.1</u>　kが非負整数ならば，

(3.7) $\quad \hat{\psi}_s\in[\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),\mathcal{L}^2_k(\mathbb{R}^n)]_\theta$ if $s>\frac{(2-\theta)n}{4}$, $0<\theta<1$。

<u>定理2の証明の概略</u>

重線型写像 $F:(b,c,\hat{d})\mapsto b\{G\}$ を考える。

命題2.1より，$F: \mathcal{L}^{\infty,1}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\times\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\to B(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n))$ として，Fは有界である。命題2.2より，$F: \mathcal{L}^{p,p}_{\leftarrow}(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)\times$ $\times\hat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}^2_{2N}(\mathbb{R}^n)\to C_p(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n))$ ($p=\infty$の時は$B(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n))$) としても，$F$は有界となる。補間定理より $F: [\mathcal{L}^{\infty,1}_{\leftarrow},\mathcal{L}^{p,p}_{\leftarrow}]_\theta\times$ $\times[\mathcal{L}^1,\hat{\mathcal{L}}^2]_\theta\times[\mathcal{L}^1,\mathcal{L}^2_{2N}]_\theta\to[B,C_p]_\theta$ ($p=\infty$の時は，B) として，Fが有界であることがわかる。

$c=\psi_s$，$d=\psi_t$，$b=(1-\Delta_x)^s(1-\Delta_\xi)^t a$ とおくと，

(3.5), (3.6), 補題 1.1, 補題 3.1と 次の補題より、$1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$ の場合には、定理2を示すことができる。

<u>補題 3.2</u>.

$1 \leqq p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $q = p/\theta$ とすれば、

$$[B(L^2(\mathbb{R}^n)),\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n))]_\theta = C_q(L^2(\mathbb{R}^n)) \qquad (3.8)$$

定理2の $1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$ の場合は、重線型写像 $\hat{F}$: $(b, \hat{c}, d) \longmapsto b\{G\}$ を考える。補題2、と補題2.2の注意を考慮すれば、$1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$ の場合と同様に定理2を示すことができる。

参考論文

[1] S. Aoki : *On L^2-boundedness and L^2-compactness of pseudo-differential operators.* Proc. Japan Acad., <u>54A</u>, 145−150 (1978)

[2] 青木 邁：擬微分作用素の L^2-有界性とコンパクト性について。 数理解析研究所講究録「超函数と線型微分方程式 VI」(1978.6) 近日刊。

[3] S. Aoki : *On the boundedness and the nuclearity of pseudo-differential operators.* to appear

[4] A. Benedek and R. Panzone : *The spaces L^P, with mixed norm.* Duke Math. J., <u>28</u>, 301−324 (1961)

[5] A. P. Calderón : Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math., 24, 113–190 (1964)

[6] A. P. Calderón and R. Vaillancourt : A class of bounded pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69, 1185–1187 (1972)

[7] H. O. Cordes : On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators. J. Func. Anal., 18, 115–131 (1975)

[8] R. Illner : A class of L^p-bounded pseudo-differential operators. Proc. Amer. Math. Soc., 51, 347–355 (1975)

[9] T. Kato : Boundedness of pseudo-differential operators. Osaka J. Math., 13, 1–9 (1976)

[10] H. Komatsu : Theory of Locally Convex Spaces. Dept. of Math., Univ. of Tokyo, 1974

[11] E. M. Stein and G. Weiss : Interpolation of operators with change of measure. Trans. Amer. Math. Soc., 87, 159–172 (1958)